

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Тамбовского государственного

Университета им. Г.Р. Державина

Стромов В.Ю.



2016 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации Макаровой Аллы Викторовны «О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Теория стохастических дифференциальных включений в настоящее время активно развивается во всем мире. Интерес исследователей вызван сложностью теоретических проблем, многочисленными приложениями в математике (в частности, в стохастических управляемых системах, в стохастических уравнениях с разрывной правой частью) и в физике. Фундаментальные результаты о стохастических дифференциальных включениях получены в работах Э. Нельсона, Э.Д. Конвея, П. Кри, Дж. Да Прато, Ж.П. Обена, М. Киселевича, Е. Мотыля, М. Михты и многих других.

В данной работе, речь идет о включениях, описанных не традиционно, в терминах стохастических интегралов, а о включениях, заданных в дифференциальной форме – в терминах, так называемых, производных в среднем по Нельсону с модификациями, введенными научным руководителем диссертантки Ю.Е. Гликлихом. Основным объектом исследования в диссертации являются дифференциальные включения с текущими скоростями – симметрическими производными в среднем. Отметим, что различные аспекты теории производных в среднем и ее приложений изучались многими авторами (Э. Нельсон, Крессон и Дарсес, Хе, Морато, С. Фаринелли и др). Начиная с работ Ю.Е. Гликлиха и его учеников, дифференциальные уравнения и включения с производными в среднем рассматриваются как отдельный класс уравнений и

включений. И этот класс уравнений и включений важен в приложениях, поскольку именно текущие скорости (симметрические производные в среднем) являются аналогами обычной физической скорости детерминированных процессов.

Условия разрешимости дифференциальных уравнений с текущими скоростями получены в совместных работах Ю.Е. Гликлиха и С.В. Азариной, вопросы разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями до недавнего времени практически не исследовались. В представленной диссертации А.В. Макаровой эти проблемы подробно изучены, найдены условия существования решений дифференциальных включений с текущими скоростями, при условии, что правая часть включения с квадратичной производной автономна.

Хотя изучение включений с текущими скоростями, как и обыкновенных дифференциальных включений, существенно использует многозначный анализ и результаты о дифференциальных уравнениях, но есть и важные отличия методов исследования включений с текущими скоростями от методов теории обыкновенных дифференциальных включений. Во-первых, известные на настоящий момент теоремы существования решений уравнений с текущими скоростями доказаны только для случая, когда правые части являются гладкими, что осложняет их применение для аппроксимации включений: требуется модификация классических методов. Второе важное отличие состоит в том, что в теории обыкновенных дифференциальных включений часто используется компактность в пространстве непрерывных кривых множества решений уравнений с однозначными аппроксимациями многозначных отображений, но для случайных процессов такой подход невозможен. В диссертации вместо компактности на пространстве непрерывных кривых используется слабая компактность мер, соответствующих решениям уравнений с аппроксимациями. Обоснованием такого подхода является доказанный автором критерий слабой компактности указанных мер для последовательности уравнений с текущими скоростями (теорема 2.5, стр. 34, 35 диссертации).

Остановимся подробнее на содержании и основных результатах диссертации. Диссертация состоит из списка обозначений, введения, трех глав, разбитых на 14 параграфов и списка литературы.

Первая глава работы носит вспомогательный характер и содержит необходимые сведения из теории многозначных отображений и стохастического анализа. Даются определения производных в среднем по Нельсону, в частности, текущей скорости и так называемой квадратичной производной в среднем, введенной С.В. Азариной и Ю.Е. Гликлихом.

Вторая глава содержит полученные автором технические утверждения, используемые в дальнейшем исследовании дифференциальных включений с текущими скоростями. Рассмотрены: множество $S_{LC}(n)$ симметрических положительно определенных $n \times n$ матриц с фиксированным определителем, равным C , и пространства $T_-(n)$ ниже-треугольных $n \times n$ матриц с нулевой диагональю, $L_0(n)$ диагональных $n \times n$ матриц с нулевым следом, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ всех $n \times n$ вещественных матриц. Основным результатом §2.1 является описание любой матрицы из $S_{LC}(n)$ с использованием матриц из $T_-(n)$, $L_0(n)$. Полученное представление матрицы из $S_{LC}(n)$ позволило использовать аппарат многозначных отображений с выпуклыми образами; необходимость данных результатов обусловлена тем, что $S_{LC}(n)$ не является линейным пространством и в нем пользоваться понятием выпуклого множества нельзя. В §2.1 также описывается конструкция римановой метрики на торе, порожденной гладкой невырожденной правой частью для квадратичной производной в среднем в уравнении с текущими скоростями, и формы объема этой римановой метрики. В §2.2 доказывается критерий слабой компактности мер на пространстве непрерывных кривых, соответствующих решениям последовательности уравнений с текущими скоростями.

В третьей главе получены результаты о разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями с различными классами правых частей. Эта глава состоит из восьми параграфов, в каждом из которых изучается отдельный класс правых частей. Отметим, что рассмотрение каждого случая потребовало индивидуального подхода, автором получены условия существования решений, характерные для каждого случая, доказаны теоремы о разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями в следующих ситуациях:

- 1) при наличии гладких селекторов,
- 2) если существуют ε -аппроксимации с равномерно ограниченными первыми частными производными,
- 3) многозначное отображение имеет равномерно ограниченные выпуклые замкнутые значения и полунепрерывно сверху,
- 4) правая часть соотношения с квадратичной производной принимает значения в $S_{LC}(n)$,
- 5) многозначное отображение имеет равномерно ограниченные выпуклые замкнутые значения и полунепрерывно снизу.

Таким образом, в диссертации предложены новые идеи, разработаны новые подходы к исследованию дифференциальных включений с текущими скоростями, получены новые результаты о разрешимости таких включений. Полученные результаты представляют несомненный теоретический интерес, могут найти применения в решении задач управления стохастическими системами, в изучении стохастических уравнений с разрывными отображениями, а также приложения в математической физике, математической экономике.

К работе имеются следующие замечания:

1. Автор рассматривает дифференциальные включения с текущими скоростями на плоском n -мерном торе и не делает попыток сформулировать и доказать утверждения о разрешимости подобных включений в \mathbb{R}^n , хотя собственно компактность тора используется лишь в некоторых разделах.
2. Имеются некоторые неточности в пояснениях обозначений, в ссылках. Обозначение $S_+(n)$ появляется в основном тексте на стр. 29 в лемме 2.1, а определение этого символа, как множества симметрических положительно определенных $n \times n$ матриц, приведено позже на стр. 30. На стр. 31 определено множество $S_{LC}(n)$ симметрических положительно определенных $n \times n$ матриц с определителем, равным C , а в лемме 2.3 на стр. 32 сказано, что $S_{LC}(n)$ содержит симметрические $n \times n$ матрицы с определителем, равным C , и пропущено свойство положительной определенности. Вовсе не следовало здесь снова пояснять символ, определенный на предыдущей странице. На стр. 34 дается ссылка на систему включений (3.1), которая появляется в следующей третьей главе на стр. 36.
3. В работе имеются несколько опечаток, текстовых и пунктуационных ошибок (цитируем некоторые: стр. 13 "Связь с этих пространств..."; стр. 31 "Частным случаем, выше изложенного, является следующее предположение, что $\alpha \in \dots$ "; в теореме 3.3 на стр. 38 опечатка в слове "также" и на стр. 68 опечатка в слове "аппроксимации"; из-за плохой редакции тяжело понять смысл первой фразы в доказательстве теоремы 3.18 на стр. 69).

Приведенные замечания не снижают общего положительного впечатления о диссертационной работе.

Результаты диссертации своевременно опубликованы в 13 работах, в том числе две статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованный ВАК РФ.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях, проводимых в Воронежском государственном университете, Воронежском государственном педагогическом университете, Тамбовском

государственном университете, Санкт-Петербургском государственном архитектурно-строительном университете, Донском государственном техническом университете (Ростов-на-Дону), Математическом институте РАН имени Стеклова и его Петербургском отделении.

Диссертация А.В. Макаровой «О разрешимости дифференциальных включений с текущими скоростями» удовлетворяет всем требованиям п.9 Положения о порядке присуждения ученых степеней ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Алла Викторовна Макарова, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв подготовлен директором научно-исследовательского института математики физики и информатики, профессором кафедры функционального анализа, доктором физико-математических наук, профессором Жуковским Евгением Семеновичем.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры функционального анализа Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина 14 ноября 2016 года, протокол № 3

Жуковский Евгений Семенович

доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, профессор, директор научно-исследовательского института математики физики и информатики, профессор кафедры функционального анализа ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», <http://www.tsutmb.nr/>, тел. +7(960)6707543, эл. адрес: zukovskys@mail.ru

Заведующий кафедрой функционального анализа,
кандидат физико-математических наук, доцент
эл. адрес: panasenko@tsutmb.ru



Е.А. Панасенко

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина». 392000, г.Тамбов, ул. Интернациональная, 33

